МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
" Математическая составляющая естественнонаучных дисциплин "

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
38.03.01 Экономика

с направленностью (профилем)
Внешнеэкономическая деятельность

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 380301-04-20

Тула 2020 год

Разработчик методических указаний

Дудина Ю.В., доцент, к.т.н. ____________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

Определение и свойства модуля действительного числа.

Определение: модулем числа *x* называется расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки *x*. **Модуль действительного числа** - это абсолютная величина этого числа.

Попросту говоря, при взятии модуля нужно отбросить от числа его знак.

Модуль числа а обозначается |a|. Обратите внимание: модуль числа всегда неотрицателен: |a|≥ 0.

|6| = 6, |-3| = 3, |-10,45| = 10,45

Определение модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля

1. Модули противоположных чисел равны	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$
2. Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа	$\lvert a\rvert^2 = a^2$
3. Квадратный корень из квадрата числа есть модуль этого числа	$\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a\rvert$
4. Модуль числа есть число неотрицательное	$\lvert a\rvert \geq 0$
5. Постоянный положительный множитель можно выносить за знак модуля	$\lvert c \cdot x\rvert = c \cdot \lvert x\rvert$ *c>0*
6. Если $\lvert a\rvert = \lvert b\rvert$, то	$a = \pm b$
7. Модуль произведения двух (и более) чисел равен произведению их модулей	$\lvert a \cdot b\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$

Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль.

Уравнения, содержащие модуль**.**

1. Уравнения вида $|f(x)| = A, \quad A \in R$ **решаются следующим образом.**

Если $A < 0$, то корней нет.

Если $A = 0$, то уравнению $|f(x)| = A$ соответствует уравнение $f(x) = 0$.

Если $A > 0$, то уравнению $|f(x)| = A$ соответствует равносильная совокупность $\begin{cases} f(x) = A \\ f(x) = -A \end{cases}$.

2. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ **решаются следующим образом.**

Уравнению $|f(x)| = g(x)$ соответствует равносильная совокупность систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

3. Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$ **решаются следующим образом.**

Способ №1

Уравнению $|f(x)| = |g(x)|$ соответствует равносильное уравнение

$f^2(x) = g^2(x)$

Способ №2

Уравнению $|f(x)| = |g(x)|$ соответствует равносильная совокупность

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

4. Уравнения вида $|f(x)| = -f(x)$ **и** $|f(x)| = f(x)$ **решаются следующим образом.**

Уравнению $|f(x)| = -f(x)$ соответствует равносильное неравенство $f(x) \le 0$.

Уравнению $|f(x)| = f(x)$ соответствует равносильное неравенство $f(x) \ge 0$.

Неравенства, содержащие модуль.

Основной метод при решении неравенств, содержащих знак модуля, заключается в следующем. ОДЗ неравенства разбивают на части, на каждой из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждой такой части решают неравенство и полученные решения объединяют в множество решений исходного неравенства.

1. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, можно решать основным методом или сведением к равносильному ему двойному неравенству:

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x).$$

2. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ можно решать основным методом или заменой на равносильную ему совокупность двух неравенств: $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

3. Неравенства вида $|f(x)| > |g(x)|$ и $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| > g(x)$ решаются методом интервалов (метод описан в пункте 3.3) по той же схеме, что и аналогичные уравнения. Некоторые неравенства вида $|f(x)| > |g(x)|$ целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $f^2(x) > g^2(x)$.

Задачи для решения:

Вариант №1.

(1-4) Решите уравнения.

1). $|X^2 - 5| = |X^2 + 4|$

2). $2|X + 2| - |3X - 3| = 5$

3). $|3 - |X + 1|| = 4$

4). $3 - 2X = |-3 + 2X|$

(5-6) Решите неравенства.

$$5).\sqrt{X^2-6X+9}\le 5$$

$$6).|5-3X|\ge 5$$

(7) Найдите число целых решений неравенства, принадлежащих промежутку.

$$|2X-3|>X+2;\ X\in[-4;5]$$

(8-9) Найдите произведение корней уравнения.

$$8).2|X+1|+3|X-1|-|X+3|=4$$

$$9).X^2+|X|=2$$

(10) Найдите среднее арифметическое корней уравнения.

$$|X^2-2X|+|X^2-3X+2|+$$

$$+|X^2-5X+6|=0$$

(11) Найдите сумму целых решений уравнения, принадлежащих отрезку.

$$\frac{|X|-6}{|X+1|-5}=1;\ X\in[-6;1]$$

Вариант №2.

(1-4) Решите уравнения.

$$1).|2X-6|=|X+8|$$

$$2).|X|-|X+1|=1$$

$$3).|2+|X-2||=5$$

$$4).3+8X=|3+8X|$$

(5-6) Решите неравенства.

$5).\sqrt{X^2 - 16X + 64} \leq 4$

$6).|8 - 2X| \geq 3$

(7) Найдите число целых решений неравенства, принадлежащих промежутку.

$$|2X - 3| > X + 4; X \in [-4;5]$$

(8-9) Найдите произведение корней уравнения.

$8).2|X + 1| + 3|X - 1| - |X + 2| = 3$

$9).X^2 - 2|X| = 8$

(10) Найдите среднее арифметическое корней уравнения.

$$|X^2 - 4X| + |X^2 - 7X + 12| +$$
$$+ |X^2 - 2X - 8| = 0$$

(11) Найдите сумму целых решений уравнения, принадлежащих отрезку.

$$\frac{|X - 2| - 2}{|X + 1| - 3} = 1; X \in [-5;3]$$

2. ДЕЙСТВИЯ СО СТЕПЕНЯМИ И РАДИКАЛАМИ. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Действия со степенями и радикалами. Упрощение выражений.

Обыкновенная дробь – число вида $\frac{a}{b}$; a – целое число, b – натуральное число. Две дроби $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ равны, если $a\cdot d=b\cdot c$. Основное свойство дробей $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$, где c – любое отличное от нуля действительное число.

Основное свойство пропорции: $a\cdot d=b\cdot c$ (в верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов).

Действия с дробями:

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Перестановка членов пропорции:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;	$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$;	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;	$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

Производные пропорции.

Дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, справедливы следующие пропорции:

$\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$;	$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Формулы сокращенного умножения:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$
$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp a \cdot b + b^2)$

Формулы корней квадратного уравнения

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, дискриминант $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$		
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2 \cdot a}$	Среди действительных чисел корней нет

Если задано квадратное уравнение в общем виде: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, то делением уравнения на $a \neq 0$ можно свести к приведенному, где $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$.

Формулы корней приведенного квадратного уравнения

$x^2 + p \cdot x + q = 0$, дискриминант $D_0 = \dfrac{p^2}{4} - q$		
$D_0 > 0$	$D_0 = 0$	$D_0 < 0$
$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{D_0}$	$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2}$	Среди действительных чисел корней нет

Теорема Виета. В приведенном квадратном уравнении $x^2 + p \cdot x + q = 0$ сумма корней равна коэффициенту при x, взятому с противоположным знаком, а их произведение – свободному члену:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p; \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Обратная теорема. Если числа t_1 и t_2 таковы, что $t_1 + t_2 = -p$, $t_1 t_2 = q$, то они являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители: если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Действия со степенями:

$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\frac{1}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=a^{-n}$

Действия с корнями (корни предполагаются арифметическими):

$\sqrt[m]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$	$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p=\sqrt[m]{a^{n\cdot p}}$	$\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[p]{a^q}=\sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p+m\cdot q}}=$ $=a^{\frac{n}{m}+\frac{q}{p}}=a^{\frac{n\cdot p+m\cdot q}{m\cdot p}}$
$\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\ (a\geq 0)$	$\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a},\quad (a\geq 0)$

Свойства числовых неравенств

$$a\geq b\ \Leftrightarrow\ b\leq a,\qquad a\geq b \text{ и } b\geq c\ \Rightarrow\ a\geq c,$$

$$a\geq b\ \Leftrightarrow\ a+c\geq b+c,\qquad a^2\geq b^2\ \Leftrightarrow\ \lvert a\rvert\geq\lvert b\rvert,$$

пусть $c>0$, тогда $a\geq b\Leftrightarrow a\cdot c\geq b\cdot c$,

пусть $c<0$, тогда $a\geq b\Leftrightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$,

пусть $a>0\ b>0$, тогда $a\geq b\Leftrightarrow \frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}$.

Тождественные преобразования алгебраических выражений.

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы соединены действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень или извлечения арифметического корня.

Равенство, обе части которого принимают одинаковые числовые значения при любых допустимых значениях входящих в него букв, называется тождеством.

Например, каждая из формул сокращенного умножения представляет собой тождество, ибо левая и правая части каждого из равенств:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \qquad a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot \left(a^2 \mp a \cdot b + b^2\right)$$

равны друг другу при любых значениях a и b. При этом одно выражение преобразуется в другое – ему тождественно равное.

При выполнении тождественных преобразований алгебраических выражений необходимо знать порядок выполнения действий, действия с дробями и степенными выражениями, формулы сокращенного умножения и др.

Следует иметь в виду, что при тождественных преобразованиях остаются неизменными:

- величина допустимых изменений буквенных величин;
- область допустимых значений каждой из буквенных величин.

Первое из этих требований является обязательным при всех преобразованиях, имеющих целью упрощение выражения или приведение его к нужному виду. Если надо, например, дополнить квадратный трехчлен $x^2 + 6 \cdot x - 7$ до полного квадрата, то, прибавив к нему число 9, необходимо такое же число и вычесть, т.е.

$$x^2 + 6 \cdot x - 7 = x^2 + 6 \cdot x + 9 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16 \cdot$$

Тождественные преобразования последнего выражения можно продолжить и привести исходное выражение к произведению двучленов:

$$(x + 3)^2 - 16 = (x + 3 + 4) \cdot (x + 3 - 4) = (x + 7) \cdot (x - 1)$$

Второе требование – неизменность областей допустимых значений, не всегда выполняется при обычно применяемых нами преобразованиях. Сократив, например, дробь $\dfrac{a^2 - 1}{a - 1}$ на разность $a - 1$ и написав равенство

$\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$, мы замечаем, что нарушено второе требование, которому должно удовлетворять тождественное преобразование: правая часть равенства имеет смысл при любых значениях a, а левая только при условии, что $a \neq 1$, т.е. произошло изменение области допустимых значений величины a. Следовательно, преобразование в данном случае не является тождественным.

Однако это не значит, что нужно отказываться от таких преобразований, которые изменяют области допустимых значений величин. Надо только при каждом таком преобразовании указать, как изменились области допустимых значений буквенных величин.

Порядок выполнения действий:

- действия с одночленами;
- действия в скобках;
- умножение или деление (в порядке появления);
- сложение или вычитание (в порядке появления).

При действиях с радикалами следует иметь в виду, что правила, по которым они выполняются, безоговорочно верны лишь для арифметических корней. По определению корень $\sqrt[n]{a}$ называется арифметическим лишь в том случае, если число a положительно или нуль, а также положительна или равна нулю и величина самого корня. Если этого не учитывать, то можно допустить ошибку. Например, равенство $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ верно лишь при условии, что $x \geq 0$. При $x<0$ нужно писать так: $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{-x}$.

Аналогично равенство $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{(a-b)}$ верно лишь в случае, если $a \geq b$. При $a<b$ оно неверно и нужно писать $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{(b-a)}$. Оба случая можно охватить такой записью: $\sqrt[6]{(a-b)^2}=\sqrt[3]{|a-b|}$.

Выполнить арифметические действия:

1. $\dfrac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}\cdot\left(5^0-\frac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot 10^{-1}.$

2. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}}\right)\cdot 5,2:\left(\dfrac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125}+5,7\right).$

3. $(4\sqrt{27}-\sqrt[3]{32})-(\sqrt[3]{108}+3\sqrt{48}).$

4. $\sqrt[4]{2^{-5}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{64}\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{2^{-1}}}{2}}.$

Упростить выражения:

22. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

23. $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}-z}{y^{\frac{2}{3}}-z}+\dfrac{y}{y+y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}.$

24. $\dfrac{\sqrt[3]{25}b^{\frac{2}{3}}-4}{\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}+2}-\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}.$

Упростить выражения и вычислить их значения при заданном значении параметров:

28. $\dfrac{m^{-2}n^{-1}-m^{-1}n^{-2}}{m^{-2}-n^{-2}}-\dfrac{1}{m}(mn^{-1}+2+m^{-1}n)^{-1}$ при $m=0,003$; $n=0,007$.

29. $\left(\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}\right):(\sqrt{abc}+2)$ при $a=0,04$.

30. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$ при $a=1,2$; $b=0,6$.

31. $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1}$ при $x=0,5$.

32. $(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}-(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$ при $x=4a-4$, $1<a<2$.

3.СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение и свойства степенных функций. Построение графиков степенных функций.

Функции $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$ и т. д. являются частными случаями степенной функции, т. е. функции $y= x^p$, где p - заданное действительное число.

Свойства и график степенной функции существенно зависит от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень $y=x^p$. Перейдем к подобному рассмотрению различных случаев в зависимости от показателя степени p.

1) Показатель $p=2n$ - четное натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{2n}$, где n - натуральное число, обладает следующими свойствами:

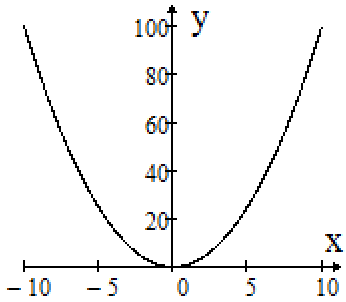


Рис. 3.1

- область определения - все действительные числа, т. е. множество R;
- множество значений - неотрицательные числа, т. е. y больше или равно 0;
- функция $y=x^{2n}$ четная, так как $x^{2n}=(-x)^{2n}$
- функция является убывающей на промежутке $x<0$ и возрастающей на промежутке $x>0$.

График функции $y=x^{2n}$ имеет такой же вид, как например график функции $y=x^2$ (Рис. 3.1)

2) Показатель $p=2n-1$ - нечетное натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{2n-1}$, где натуральное число, обладает следующими свойствами:

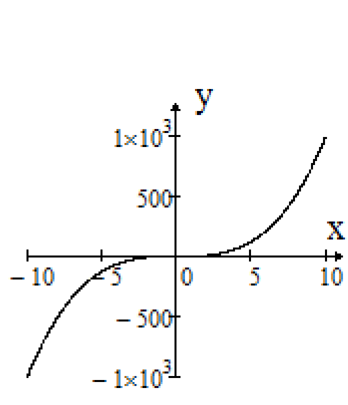


Рис. 3.2

- область определения - множество R;
- множество значений - множество R;

- функция $y=x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1}=x^{2n-1}$;
- функция является возрастающей на всей действительной оси.

  График функции $y=x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=x^3$ (Рис. 3.2)

3) Показатель $p= -2n$, где n - натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{-2n}=1/x^{2n}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R, кроме x=0;
- множество значений - положительные числа y>0;
- функция $y=1/x^{2n}$ четная, так как $1/(-x)^{2n}=1/x^{2n}$;
- функция является возрастающей на промежутке $x<0$ и убывающей на промежутке $x>0$.

  График функции $y=1/x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=1/x^2$ (Рис. 3.3).

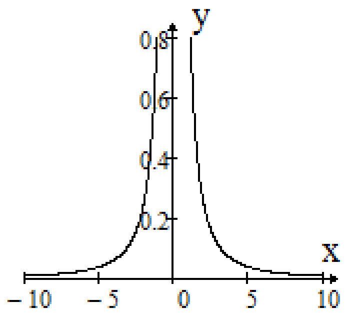


Рис.3.3

4) Показатель $p=-(2n-1)$, где n - натуральное число. В этом случае степенная функция $y=x^{-(2n-1)}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R, кроме $x=0$;
- множество значений - множество R, кроме $y=0$;
- функция $y=x^{-(2n-1)}$ нечетная, так как $(-x)^{-(2n-1)} =-x^{-(2n-1)}$;
- функция является убывающей на промежутках $x<0$ и $x>0$.

  График функции $y=x^{-(2n-1)}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y=1/x^3$ (Рис. 3.4)

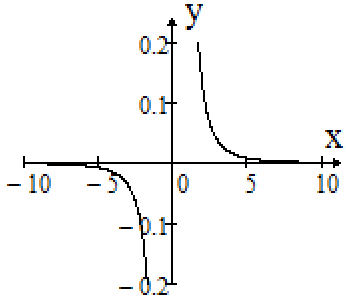


Рис. 3.4

Квадратные уравнения. Рациональные уравнения

Если выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, составлены лишь с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, то уравнение называется **рациональным**.

Рациональное уравнение называется **целым**, или **алгебраическим**, если в нем нет деления на выражение, содержащее переменную. К целым уравнением относятся, например, линейные и квадратные уравнения.

Решением, или **корнем уравнения**, называется всякое значение неизвестного *x*, при подстановке которого в обе части уравнения получается истинное числовое равенство. **Решить уравнение** - значит найти все его корни или доказать, что корней нет. Решая уравнение, мы применяем к нему некоторые преобразования. Если исходное и преобразованное уравнения имеют одни и те же корни, то они называются **равносильными**. В частности, уравнения, которые не имеют корней, также считаются равносильными.

Основные теоремы преобразования уравнения в равносильное ему:

- Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:

  а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x)=g(x)$;

  б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$, равносильное данному.

Квадратные уравнения.

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$$

Функция $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется квадратичной функцией. График этой функции – парабола, координаты вершины которой равны: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a<0$ - вниз. Нахождение корней уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ подробно изложено в пункте 2.1.

Целые рациональные уравнения.

Многочленом n- ой степени ($n\in Z, n\geq 0$) от переменной x называется выражение

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \ ,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные действительные числа, причем $a_0\neq 0$. Многочленами нулевой степени являются отличные от нуля действительные числа. Число 0 единственный многочлен, степень которого не определена.

Уравнение $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, $n\geq 1$, называется алгебраическим уравнением n-ой степени.

Если x_0 – корень многочлена $P_n(x)$, т.е. $P_n(x_0)=0$, то $P_n(x)$ без остатка делится на ($x-x_0$):

$$P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$– многочлен степени $n-1$. Многочлен $P_{n-1}(x)$ можно найти либо делением «уголком» многочлена $P_n(x)$ на ($x-x_0$), либо группировкой слагаемых многочлена $P_n(x)$ и выделением из них множителя $x-x_0$. Основными методами решения уравнения $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n ($n>2$), являются метод разложения левой части уравнения на множители и метод введения новой переменной.

Множество рациональных уравнений за типом и методом решения можно разделить на следующие:

1. Решение с помощью подстановки. При решении некоторых рациональных уравнений имеет смысл ввести новую переменную, заменив ею некое рациональное выражение. Например, в уравнении $aP^2(x) + bP(x) + c = 0$, где $P(x)$ - многочлен, введем новую переменную $y = P(x)$. Решаем квадратное уравнение $ay^2 + by + c = 0$ относительно y и возвращаемся к решению уравнений $P(x) = y_i$, где y_i - решения уравнения.

2. Распадающееся уравнение. Рациональное уравнение называется распадающимся, если его можно представить в виде $P(x)Q(x) = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - целые рациональные функции. Для решения таких уравнений нужно представить уравнение $P(x)Q(x) = 0$ в виде совокупности:

$$\left\{\begin{array}{l} P_m(x)=0, \\ Q_n(x)=0. \end{array}\right.$$

3. Однородное уравнение второго порядка $aP^2(x) + bP(x)Q(x) + cQ^2(x) = 0$. Для его решения рассмотрим два случая. Первый - $Q(x) = 0$, тогда уравнение сводится к решению уравнения $P(x) = 0$. Второй случай - $Q(x) \neq 0$, тогда исходное уравнение можно поделить на $Q^2(x)$ и получить $a(P(x)/Q(x))^2 + bP(x)/Q(x) + c = 0$. Вводим замену $P(x)/Q(x) = t$ и получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$. В ответ включаем решения обоих случаев.

4. Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Для решения такого уравнения делается замена $x^2 = t$, $x^4 = t^2$. После подстановки новой переменной получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$. Решив его, приходим к уравнению $x^2 = t_i$, где t_i - корни уравнения.

5. Симметричное уравнение третьего порядка $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$. Для его решения проведем следующие преобразования: $ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a)$. В итоге получаем распадающееся уравнение, решаем совокупность:

$$\left\{\begin{array}{l} x+1=0, \\ ax^2+(b-a)x+a=0. \end{array}\right.$$

6. Симметрическое уравнение четвертого порядка $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Сгруппируем слагаемые и разделим обе части на x^2. Получим

$a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x)+ c = 0$.

Сделаем подстановку $x + 1/x = t$, тогда $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$. Получаем квадратное уравнение $at^2 + bt + (c - 2a) = 0$. После его решения возвращаемся к исходной переменной x.

7. Возвратное уравнение. Уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $e/a = (d/b)^2$, называется возвратным уравнением четвертого порядка. Для его решения делим уравнение на x^2 и вводим переменную $t = bx + d/x$, после чего получаем квадратное уравнение $at^2/b^2 + t + c - 2ad/b = 0$. Решив его, возвращаемся к исходной переменной.

8. Уравнения вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = m$, *где* $a + b = c + d$. В данном случае вводим новую переменную $t = x^2 + (a + b)x$ и получаем квадратное уравнение $(t + ab)(t + cd) = m$. Решив его, возвращаемся к исходной переменной.

Дробно-рациональные уравнения.

Уравнение вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены, называется рациональным. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} P_m(x) = 0, \\ Q_n(x) \neq 0. \end{cases}$

Общих методов решения дробно-рациональных уравнений, тем не менее, не существует. Решение очень многих из них основано на удачной группировке и последующем приведении сгруппированных слагаемых к общему знаменателю. В более простых случаях группировка не требуется, а иногда уравнение можно упростить, введя новую переменную. При решении рациональных уравнений возникает опасность получения посторонних решений, которая купируется либо проверкой, либо нахождением области допустимых значений, либо просто указанием соответствующих ограничений и дальнейшей проверкой их выполнения.

Решение дробно-рационального уравнения сводится в конечном итоге к замене исходного уравнения целым уравнением, которое равносильно исходному уравнению или является его следствием.

При решении дробного уравнения целесообразно поступать следующим образом:

1. определить область допустимых значений переменной x (ОДЗ);
2. найти наименьший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

3. умножить обе части уравнения на общий знаменатель и привести подобные;
4. решить получившееся целое уравнение.

Решение некоторых видов дробно-рациональных уравнений:

1. **Уравнение вида P(x)/Q(x) = 0.** Решаем уравнение $P(x) = 0$. Проверяем, чему равно значение $Q(x_i)$, где x_i - корни уравнения $P(x) = 0$. Если $Q(x_i) \neq 0$, значит они являются решением исходного уравнения. Если $Q(x_i) = 0$ - корень выпадает из области определения исходного уравнения и его нужно исключить из ответа.
2. **Уравнение вида aP(x)/Q(x) + bQ(x)/P(x) + c = 0**. Вводим новую переменную $t = P(x)/Q(x)$ и получаем следующее уравнение: $at + b/t + c = 0$. Или после домножения на t ($t \neq 0$) получаем квадратное уравнение $at^2 + ct + b = 0$. Решив его, возвращаемся к исходной переменной.
3. **Уравнение состоящее из суммы дробей.** Один из методов состоит в том, что нужно перенести все члены уравнения в одну часть и свести уравнение к виду $P(x)/Q(x) = 0$.

Рациональные неравенства

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на некотором множестве A. Поставим задачу: найти множество X, на котором значения одной из функций больше (меньше) значений другой из них, другими словами, найти все значения x, для которых выполняется неравенство: $f(x) > \varphi(x)$ ($f(x) < \varphi(x)$).

При такой постановке каждое из этих неравенств называется <u>алгебраическим неравенством</u> с неизвестным x.

Как при решении уравнения, так и при решении неравенства требуется найти все те значения неизвестной величины, для каждого из которых указанное соотношение оказывается верным. Поэтому естественно и для неравенств ввести понятия, аналогичные тем, которые были введены для уравнений.

Множество A называется <u>множеством (областью) допустимых значений</u> неизвестного для данного неравенства.

Множество X называется множеством решений данного неравенства.

Решить неравенство – значит найти множество всех x, для которых данное неравенство выполняется.

Два неравенства называются равносильными, если множества решений их совпадают, т.е. если всякое решение каждого из них является решением другого.

Значение неизвестного называется допустимым для неравенства, если при этом значении обе части неравенства имеют смысл. Совокупность всех допустимых значений неизвестного называется областью определения неравенства.

Основные теоремы преобразования неравенства в равносильное ему:

- Какое-нибудь слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком;
- Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то отличное от нуля положительное число; если это число отрицательное, то знак неравенства меняется на противоположный;
- Если неравенство имеет вид $f(x)\cdot g(x) > \varphi(x)\cdot g(x)$ или $f(x)\cdot g(x) < \varphi(x)\cdot g(x)$, то деление обеих его частей на $g(x)$, как правило, недопустимо, поскольку может привести к потере решений.

Между решениями неравенств и уравнений много общего. Отличие же состоит в том, что решением неравенств чаще всего являются бесконечные множества.

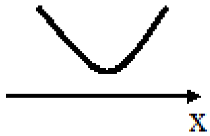
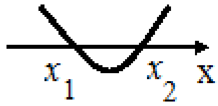
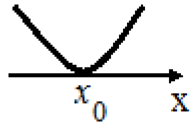
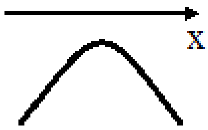
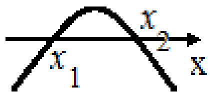
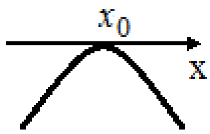
Значит, сделать полную проверку ответа, как это делается для уравнений, нельзя. Поэтому очень важно при решении неравенств переходить только к равносильным неравенствам.

К равносильным неравенствам приводят тождественные преобразования, не изменяющие область допустимых значений.

Свойства числовых неравенств приведены в пункте 2.1.

Решение неравенств, содержащих квадратный трехчлен:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Пусть $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ - дискриминант квадратного трехчлена.

Вид неравенства	$D<0$	$D>0$	$D=0$
$a>0$			
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$	решений нет	$x \in (x_1; x_2)$	решений нет
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$	решений нет	$x \in [x_1; x_2]$	$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$
$a<0$			
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$	Решений нет	$x \in [x_1; x_2]$	$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$	Решений нет	$x \in (x_1; x_2)$	Решений нет
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$
$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$	$x \in (-\infty; \infty)$	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$	$x \in (-\infty; \infty)$

Решение целых рациональных неравенств

если в неравенстве $f(x) < \varphi(x)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, то его называют <u>целым рациональным неравенством</u>.

Если неравенство $f(x) < \varphi(x)$ привести к равносильному $f(x) - \varphi(x) < 0$ и разложить левую часть на линейные множители, то такое неравенство можно решить <u>методом интервалов</u>.

Суть этого метода интервалов в следующем:

- Определить область значения переменной (ОДЗ);
- Перенести все в левую часть и решить уравнение, приравняв выражение в левой части к нулю. Разложить на множители, скобки сокращать нельзя;
- Найденные корни уравнения нанести на числовую ось. Если корни входят в ОДЗ, они рисуются закрашенными, если не входят, то выбиты. Эти корни разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых выражение, стоящее в левой части, сохраняет знак;
- Выбрать в каждом из промежутков какое-нибудь значение («пробную» точку) и определить знак выражения в этой точке;
- Выбрать промежутки, в которых выражение имеет требуемый знак и записать ответ, взяв их объединения.
- Если неравенство нестрогое нужно учесть корни, входящие в ОДЗ и приводящие уравнение к нулю.
-

Решение дробно-рациональных неравенств

дробно рациональные неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ можно привести к равносильному неравенству $\begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \\ P_m(x) = 0, \\ Q_n(x) \neq 0 \end{cases}$ тогда метод интервалов применим и для решения дробно-рациональных неравенств.

1. Решить неравенства

1) $x^2 + 2x - 3 \geq 0.$ 3) $x^2 - 2x + 1 > 0;$

2) $-2x^2 + x + 3 > 0;$ 4) $-x^2 + 4x - 5 \geq 0.$

2. Решить неравенства методом интервалов:

1) $\frac{(x-3)(x+2)}{x-5} < 0;$ 2) $\frac{(x-3)^2(x+2)}{x-5} \geq 0;$

3) $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-5} \geq 0;$ 4) $\dfrac{(x-3)(x+2)^2}{(x-5)^2} \leq 0;$

5) $\dfrac{(x-3)\ (x+2)}{x-5} < 0;$

3. Решить уравнение

1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$ 2) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x = 0;$

3) $(3x^2 - x - 1)^2 - 18x^2 + 6x + 6 = 0;$ 4) $x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0;$

4. Решить уравнения:

1) $x^3 - 7x - 6 = 0;$ 2) $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) = 105;$

3) $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0;$ 4) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0.$

Решить уравнения:

4. $\dfrac{4}{x} + 5 = \dfrac{1}{x^2}.$

5. $2x^8 + 5x^4 - 7 = 0.$

6. $\dfrac{14x^2}{16 - x^2} + \dfrac{11}{x-4} = \dfrac{49}{x+4}.$

7. $\dfrac{2}{x^2+3} + \dfrac{4}{x^2+7} = 1.$

8. $\dfrac{x^2-3x}{x-2} + \dfrac{x-2}{x^2-3x} = 2,5.$

9. $\dfrac{x^3-64}{4x-16} = \dfrac{9}{4}x + 3.$

4. ВЕКТОРЫ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

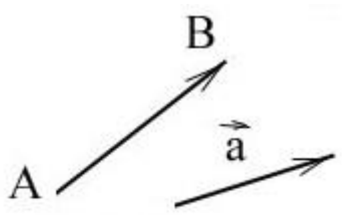


Рис. 4.1

Геометрический вектор представлен в двумерном и трёхмерном пространстве в виде *направленного отрезка*, т.е. отрезка, у которого различают начало и конец.

Если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом или одной строчной буквой $\vec{a}$. В литературе часто вектор обозначается жирным шрифтом **AB** или ***a***. На рисунке конец вектора указывается стрелкой (Рис. 4.1).

Физическими примерами векторных величин могут служить перемещение материальной точки, двигающейся в пространстве, скорость и ускорение этой точки, а также действующая на неё сила.

Длиной (или **модулем**) геометрического вектора называется длина порождающего его отрезка и обозначается $|\vec{AB}|$.

Коллинеарные, равные, компланарные векторы.

Определение. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых называются коллинеарными.

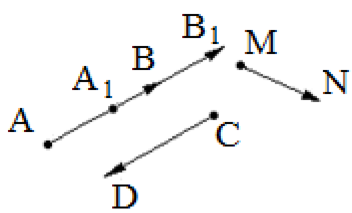


Рис. 4.2

Обозначают: $\vec{AB} \parallel \vec{A_1B_1}$, $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$,

$\vec{AB}$ не $\parallel$ $\vec{MN}$ (Рис. 4.2)

Определение. Векторы называются равными, если они:

1) Коллинеарны;
2) Имеют равные модули;
3) Одинаково направлены.

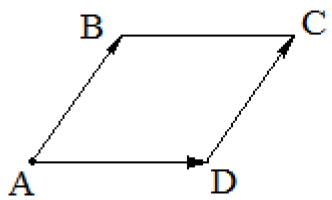


Рис. 4.3

Пишут: $\vec{AB} = \vec{CD}$, но $\vec{AB} \neq \vec{AC}$ (Рис. 4.3)

В физике часто рассматриваются **закреплённые векторы**, заданные точкой приложения, длиной и направлением. Если точка приложения вектора не имеет значения, то его можно переносить, сохраняя длину и направление в любую точку пространства. В этом случае вектор называется **свободным**. Будем рассматривать только **свободные векторы**.

Определение: Три вектора называются компланарными, если они лежат в некоторой одной плоскости или параллельны какой-то одной плоскости (Рис. 4.4).

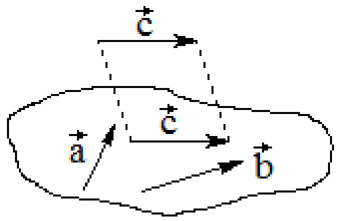


Рис.4.4

Примером некомпланарной тройки векторов могут служить направленные рёбра куба, исходящие из одной вершины.

Линейные операции над векторами.

Над векторами производят различные действия (операции). Умножение вектора на скаляр (число) и сложение векторов называют линейными операциями.

1. Умножение вектора на число.

Определение: Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\vec{b}$, который:

1) имеет модуль $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;
2) коллинеарен вектору $\vec{a}$;
3) направлен так же как вектор $\vec{a}$ при $\lambda>0$ и противоположено вектору $\vec{a}$ при $\lambda<0$.

Обозначается произведение $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$. В частности, при $\lambda=-1$ имеем $(-1)\cdot\vec{a}$. Вектор $-\vec{a}$ называется противоположенным вектору $\vec{a}$ (Рис. 4.5).

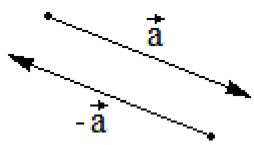


Рис. 4.5

Если $\vec{a}=0$ или $\lambda=0$, то $\lambda\cdot\vec{a}=0$ – нулевой вектор. Ему не приписывается никакого определенного направления, начало и конец совпадают.

Геометрический смысл операции умножения вектора $\vec{a}$ на число λ состоит в "растяжении" вектора $\vec{a}$ в λ раз, (если $|\lambda|>1$, то это действительно растяжение, а при $|\lambda|<1$, – это сжатие) с возможным изменением направления.

Если $|\vec{e}|=1$, то вектор $\vec{e}$ называется единичным вектором (ортом). Вектор $\vec{a}=\vec{a}^{\circ}\cdot|\vec{a}|$, если $\vec{a}^{\circ}$ единичный вектор (орт) вектора $\vec{a}$.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них линейно выражается через другой: $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ (или $\vec{b}=\lambda\vec{a}$). Очевидно $\lambda=\pm|\vec{a}|/|\vec{b}|$.

"+" если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково;

"–" если противоположено.

2. Сложение векторов.

Определение: Суммой векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называется вектор $\vec{R}$, замыкающий ломаную линию, построенную из них параллельным переносом, когда конец предыдущего вектора является началом следующего, причем начало его в начале вектора $\vec{a}_1$, конец в конце вектора $\vec{a}_n$. Обозначают: $\vec{R}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$

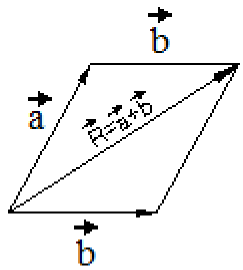


Рис. 4.6

Из этого общего правила легко следует удобное правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов: сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённых к одному началу О, есть вектор–диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (Рис. 4.6)

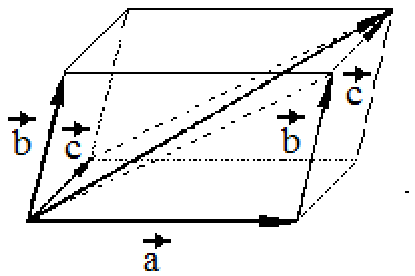


Рис. 4.7

Из рисунка 4.6 видно, что вектор–диагональ $\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}$ является замыканием ломаной из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что согласуется с общим правилом сложения.

Из общего же правила следует и правило параллелепипеда нахождения суммы трех векторов, приведенных в одно начало О (и не компланарных): это есть вектор–диагональ параллелепипеда, построенного на данных векторах, как на сторонах (Рис. 4.7).

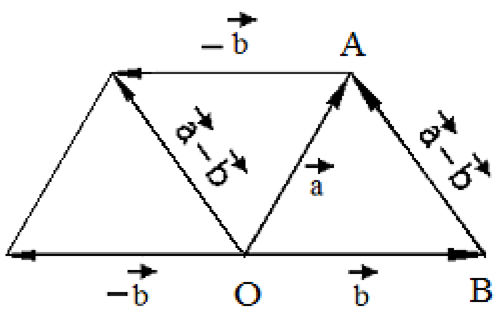


Рис. 4.8

Операция вычитания векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a}$-$\vec{b}$) понимается как сложение вектора $\vec{a}$ с вектором -$\vec{b}$, противоположенным вектору $\vec{b}$.

На практике по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведённым в одно начало О, сразу строят вектор $B\vec{A}=\vec{a}-\vec{b}$, как идущий из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$. (Рис. 4.8)

3. Свойства линейных операций.

Отметим восемь основных свойств линейных операций над векторами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения или переместительность)

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ассоциативность сложения или сочетательность)

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (существование нулевого вектора)

4) Для любого вектора $\vec{a}$ существует ему противоположенный вектор $-\vec{a}$, так что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (существование вектора равного данному)

6) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a},$ (ассоциативность умножения на скаляр)

7) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$ (распределительные свойства относи-

8) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}.$ тельно умножения на скаляр)

Пространство, в котором определены данные линейные операции над векторами, называют линейным.

Проекция вектора

Проекцией вектора $\overline{M_1M_2}$ на заданную ось $\vec{l}$ называется численное значение вектора $\overline{N_1N_2}$ на оси $\vec{l}$ (Рис. 4.10а). Проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется проекция вектора $\vec{a}$ на ось, имеющую с вектором $\vec{b}$ одинаковое направление (Рис. 4.10б).

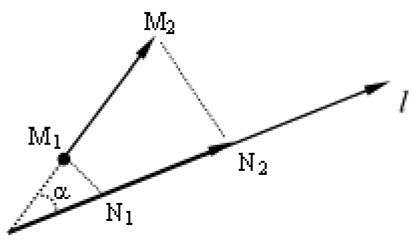


Рис. 4.10а

$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha$, где α- угол между вектором $\vec{a}$ и осью $\vec{l}$.

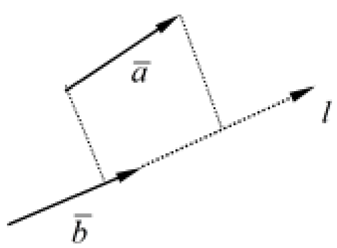


Рис. 4.10б

Свойство проекций:

1) Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов, т.е.

$$\text{Пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{Пр}_l\vec{a}+\text{Пр}_l\vec{b}\ ;$$

2) проекция произведения вектора $\vec{a}$ на число λ равна произведению числа на проекцию вектора $\vec{a}$, т.е. $\text{Пр}_l\ \lambda\cdot\vec{a}=\lambda\,\text{Пр}_l\vec{a}$.

Разложение вектора по базису.

Пусть заданы векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ и числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. Составим комбинацию из этих векторов, используя только введенные линейные комбинации сложения и умножения вектора на число. В самом общем случае она имеет вид: $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$. Такие комбинации называются линейными комбинациями векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$, а числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ коэффициентами линейной комбинации.

Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он разложен по этим векторам.

Теорема 1. Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Любой коллинеарный ему вектор $\vec{b}$ представлен в виде $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ единственным образом.

Теорема 2. Любой вектор $\vec{a}$ на плоскости может быть разложен по двум неколлинеарным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ единственным образом.

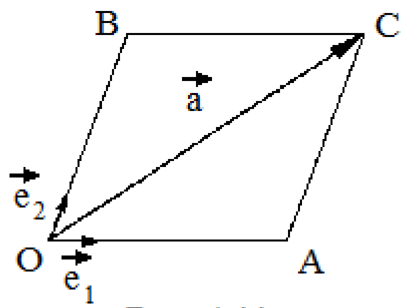


Рис. 4.11

$$\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2.$$

Неколлинеарные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, взятые в определенном порядке, называются базисом на плоскости, а коэффициенты линейной комбинации координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Теорема 3. Если $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ три некомпланарные вектора, то всякий четвертый вектор $\vec{a}$ раскладывается по ним и это разложение единственно.

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Определение: Любые два неколлинеарных упорядоченных (взятых в определенном порядке) вектора на плоскости называются базисом на этой плоскости. Любые три некомпланарные упорядоченные вектора в пространстве называются базисом в пространстве.

Таким образом, в пространстве с выбранным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ нам удалось каждому вектору поставить в соответствие тройку чисел - его координат. Теперь при выполнении введенных операций над векторами можно заменить геометрические построения аналитическими выражениями.

Пусть $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3, \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3,$

тогда $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\vec{e}_3$

и $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1)\vec{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\vec{e}_3.$

Таким образом, при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, а при сложении векторов складываются их соответствующие координаты, если они определены относительно одного и того же базиса.

Декартовы прямоугольные координаты

Определение: декартовой системой координат называются совокупность точки и базиса. Точка O - начало координат, Ox, Oy, Oz - координатные оси, Oxy, Oyz, Oxz -координатные плоскости.

Ось Ox называют осью *абсцисс*, ось Oy - осью *ординат* и ось Oz - осью *аппликат*.

Часто используется в декартовой системе координат, базисные векторы которой взаимно перпендикулярны и имеют единичные длины:

$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Разложим произвольный вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства по ортам. Для этого построим вектор $\vec{OM}$, равный вектору $\vec{a}$

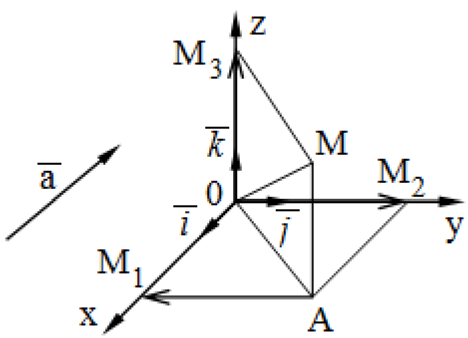


Рис.4.12

(Рис.4.12). Тогда $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, иначе вектор $\vec{a}$ можно записать в виде: $\vec{a} = (x, y, z)$.

Из единственности разложения вектора $\vec{a}$ по ортам, следует, что если координаты любых двух векторов $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ равны, т.е. $x_a=x_b$, $y_a=y_b$, $z_a=z_b$, то эти векторы тоже равны.

Вектор $\vec{OM}$, идущий от начала точки O к точке $M(x, y, z)$ называется *радиус - вектором* этой точки, и его координаты $\vec{OM}(x, y, z)$ совпадают с соответствующими координатами точки M.

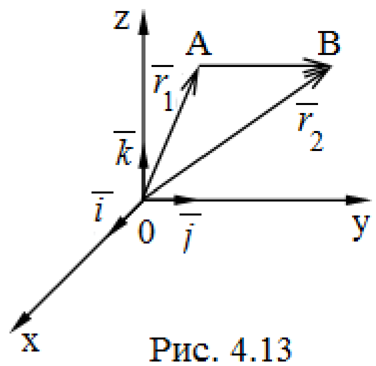


Рис. 4.13

Пусть $\vec{AB}$ - вектор, координаты начала и конца которого известны $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты вектора $\vec{AB}$ выражаются по формулам: $X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$.

Из рис. 4.13 видно, что $\vec{AB} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

Используя свойства проекций, имеем: $X = Пр_{ox}\vec{AB} = Пр_{ox}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = x_2 - x_1$, и аналогичным образом находим $Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1$.

Разложение вектора $\vec{AB}$ по ортам будет иметь следующий вид:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Перемножение векторов и свойства независимости векторов подробно рассматриваются в курсе высшей математики.

Задачи

1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти $пр_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b}$.

2. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{b} = 10\vec{i} - 2\sqrt{2} \cdot \vec{j} - 6\vec{k}$ и осью OZ.

3. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a} = -6\vec{i} - 5\vec{k}$ и $\vec{b}\{5;\ \sqrt{3};\ 6\}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

5. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и осью ОУ.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a} + \vec{b}$ и осью ОХ.

7. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\overline{AC}}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

9. Определить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

10. Определить, при каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ перпендикулярны.

11. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b}\{1;\ \alpha;\ 2\}$ взаимно перпендикулярны.

12. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине B.

13. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине A.

14. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}\{2;\ 1;\ -1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

15. Даны две точки $M(-5;\ 7;\ -6)$ и $N(7;\ -9;\ 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}\{1,\ -3,\ 1\}$ на ось вектора $\overrightarrow{MN}$.

16. Даны векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}\,\vec{b}$.

17. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b} = -\vec{j} + \vec{k}$.

18. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;\ -6;\ -1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4;\ -5\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

19. Даны три вектора: $\vec{a}\{1;-3;\ 4\}$, $\vec{b}\{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

20. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

21. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;-6;-1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4;\ -5\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

22. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{j}$

и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot \left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) = -6$.

23. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{b} = 6$.

24. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

25. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

26. Дан вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и точки $M(3;\ -1;\ 2)$ и $N(4;\ -2;\ 1)$. Найти $\text{пр}_{\overline{MN}}\,\vec{a}$.

27. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;1;\ 1)$, $C(0;\ 0;\ 5)$. Определить внутренний угол при вершине A.

28. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{b}\{2;\ -2;\ 1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

29. Даны вершины треугольника: $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону $\overrightarrow{AC}$.

30. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$.

5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение и свойства показательной функции. График показательной функции.

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

График показательной функции

Графиком показательной функции является *экспонента*:

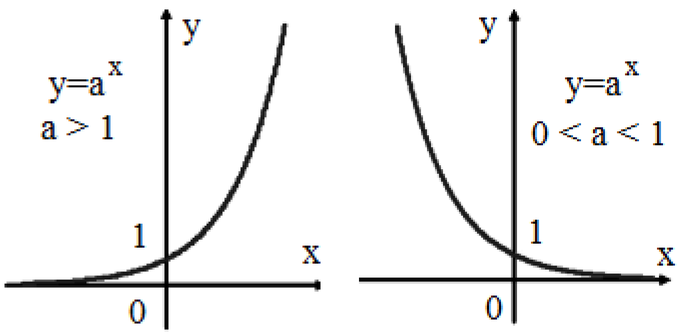


Рис. 5.1. Графики показательных функций (экспоненты)

Различные способы решения показательных уравнений и неравенств.

Показательными называются уравнения и неравенства, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Решение показательных уравнений

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Основные формулы и действия со степенями:

$a > 0$, $b > 0$:

$a^0 = 1$, $1^x = 1$; $\quad a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in Z, n \in N)$; $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $\quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}$; $\quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$; $\quad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Основные методы решения показательных уравнений

1. Метод приведения степеней к одинаковому основанию.
2. Вынесение общего множителя за скобки.
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод почленного деления.
5. Графический метод.

I. Уравнения вида $a^{\varphi(x)}=1$. (Метод приведения степеней к одинаковому основанию).

II. Уравнения вида $a^{\varphi(x)}=a^{\alpha}$. (Метод приведения степеней к одинаковому основанию).

III. Уравнения вида $A_0a^{mx+k_0} + A_1a^{mx+k_1} + A_2a^{mx+k_2} + \ldots + A_na^{mx+k_n} = M$. (Вынесение общего множителя за скобки).

Приведём общий алгоритм метода вынесения общего множителя за скобки на примере уравнения $A_0a^{mx+k_0} + A_1a^{mx+k_1} + A_2a^{mx+k_2} + \ldots + A_na^{mx+k_n} = M$:

1. вынесем общий множитель за скобки: $a^{mx}(A_0a^{k_0} + A_1a^{k_1} + A_2a^{k_2} + \ldots + A_na^{k_n}) = M$;
2. обозначим выражение в скобках $A_0a^{k_0} + A_1a^{k_1} + A_2a^{k_2} + \ldots + A_na^{k_n} = N$;
3. подставим замену в изначальное уравнение $a^{mx} N = M$;
4. получим простейшее показательное уравнение $a^{mx} = M/N$;
5. находим решение этого уравнения при условии, что если $M/N \leq 0$, то уравнение решений не имеет.

IV. Уравнения вида $A_0a^{2x} + A_1a^x + A_2 = 0$. (Метод введения новой переменной).

Приведём общий алгоритм метода введения новой переменной на примере уравнения $A_0a^{2x} + A_1a^x + A_2 = 0$.

Если в показательном уравнении все основания одинаковы, а показатели степеней – разные, то:

1. приведите к одному показателю степени и получите уравнение с одинаковыми основаниями и одинаковыми показателями степеней, например $A_0 (a^x)^2 + A_1a^x + A_2 = 0$;
2. сделайте замену переменной, например $a^x = y$;
3. решите уравнение относительно этой новой переменной ($A_0 y^2 + A_1y + A_2 = 0$);
4. сделайте обратную замену переменной и получите совокупность простейших показательных уравнений.

V. Уравнения вида $A_0a^x + A_1a^{x/2}b^{x/2} + A_2b^x = 0$. (Метод почленного деления).

Однородные уравнения второй степени в общем виде можно записать так:

$$A_0a^{2f(x)} + A_1a^{f(x)}b^{f(x)} + A_2b^{2f(x)} = 0$$

где A_0, A_1, A_2, a и b — некоторые числа, причём a и b — положительны и отличны от единицы.

Чтобы прийти к такому виду, почти всегда уравнение требуется предварительно преобразовать. Чаще всего уравнение записывают в виде

$$A_0a^{2f(x)} + A_1(a \cdot b)^{f(x)} + A_2b^{2f(x)} = 0$$

Запишем признаки, которые позволят отличить однородное уравнение от уравнений другого вида.

<u>Признаки однородного показательного уравнения второй степени</u>

- уравнение содержит ровно три степени с разными основаниями;
- показатели двух степеней ровно в два раза больше показателя третьей степени;
- основание этой третьей степени равно произведению оснований двух других степеней.

Приведём общий алгоритм метода почленного деления на примере уравнения $A_0a^x + A_1a^{x/2} b^{x/2} + A_2b^x = 0$.

Если в показательном уравнении встречаются два разных основания степеней с разными показателями, то:

1. приведите к одинаковым показателям степеней и получите уравнение с двумя разными основаниями и одинаковыми (или кратными) показателями степеней;
2. разделите все уравнение почленно на меньшее основание в степени уравнения (например на $b^x \neq 0$). Преобразуйте дроби с помощью тождества степени дроби и получите показательное уравнение с одинаковыми основаниями и одинаковыми показателями степеней ($A_0(a/b)^x + A_1(a/b)^{x/2} + A_2 = 0$);
3. сделайте замену переменной ($(a/b)^{x/2} = y$);
4. решите уравнение относительно этой новой переменной ($A_0y^2 + A_1y + A_2 = 0$);
5. сделайте обратную замену переменной и получите совокупность простейших показательных уравнений.

VI. Уравнения вида $a^{\varphi(x)}=f(x)$. (Графический способ).

Решение показательных неравенств.

Определение: Пусть a - данное положительное, не равное единице число и b - данное действительное число. Тогда неравенства $a^x > b \left(a^x \geq b\right)$ и $a^x < b \left(a^x \leq b\right)$ называются *простейшими показательными неравенствами*.

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство. Решить неравенство - значит, найти все его решения или показать, что их нет.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Методы решения показательных неравенств.

1. Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим.

2. Метод введения новой переменной.

3. **Метод вынесения общего множителя за скобки.**
4. **Метод почленного деления.**

5. **Метод рационализации.**

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ в области определения выражения $F(x)$. Под знаком $\vee$ подразумевается один из знаков $>, <, \geq, \leq$.

Любое неравенство приводимо к виду $\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_k} \vee 0$,

где $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k$ — некоторые функции. Довольно часто каждую из них можно заменить на другую знакосовпадающую функцию на области определения. Приведём основные типы выражений, для которых можно использовать метод рационализации.

В первом столбце таблицы — функция $F(x)$, которую мы рационализируем. Во втором столбце — функция $G(x)$ — знакосовпадающая с функцией $F(x)$ на области её определения. При этом, используя метод рационализации, нельзя забывать про область определения функций. При решении задачи исходное неравенство преобразуется в систему: рационализированное неравенство и ОДЗ исходного неравенства.

Выражение F	**Выражение** G	**ОДЗ**
$h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-g(x))$	$h(x)>0$
$h(x)^{f(x)}-1$	$(h(x)-1)\cdot f(x)$	$h(x)>0$
$f(x)^{h(x)}-g(x)^{h(x)}$	$(f(x)-g(x))\cdot h(x)$	$f(x)>0, g(x)>0$

Теорема 3. Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)}$ равносильно следующей системе неравенств: $\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases}$

Решить показательные уравнения:

23. $\sqrt[4]{125^{3-2x}} = \dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$.

24. $3^{2-x} - 6\cdot 3^{2x} = 3^{2x+1}$.

25. $2\cdot 6^{x} + 3\cdot 6^{x+3} = 325\cdot 3^{-1}$.

26. $49^{x+1} + 55\cdot 7^{x+1} - 56 = 0$.

27. $3^{2x+5} - 2^{2x+7} + 3^{2x+4} - 2^{2x+4} = 0$.

28. $4\cdot 3^{2x} - 2^{2x-1} - 3^{2x+1} - 2^{2x} = 0$.

29. $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-2}{2}} = 66$.

30. $(x^2-2x+2)^{x^2-x} = (x^2-2x+2)^{4x-6}$.

31. $3\cdot 2^{2x} + 6^{x} - 2\cdot 3^{2x} = 0$.

32. $5^{x} - 1 = \sqrt{6+2\cdot 5^{x}}$.

33. $|x-4|^{\sqrt{-x^2-5x}} = |x-4|^2$.

34. Найти произведение корней уравнения $x^{\log_2 x} = \dfrac{x^3}{4}$.

35. Найти сумму корней уравнения $\sqrt{x-1,5}\left(2^{x} + 8\cdot 2^{-x} - 6\right) = 0$.

36. Найти сумму корней уравнения $2^{x^2} + 2^{x^2+3} - 2^{x^2+1} = 7\cdot 2^{5x+6}$.

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

24. $5^{x+1} - 3^{x+2} > 2\cdot 5^{x} - 2\cdot 3^{x-1}$.

25. $7^{x+2} - 8^{x+2} < 6\cdot 7^{x+1} - 7\cdot 8^{x+1}$.

26. $2^{2x} - 3\cdot 2^{x} + 2 \leqslant 0$.

27. $9^{x+1} - 3^{x+3} < 3^{x} - 3$.

28. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geqslant \left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+2}$.

29. $(0,2)^{\frac{6x-1}{3-x}} < \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2}$.

30. $5^{\sqrt{x-2}} > 5^{1-\sqrt{x-2}} + 4$.

31. $(x-3)^{x^2-9} > 1$.

32. $(x+1)^{x^2-4} \geqslant 1$.

Решить неравенства:

33. $3^{\sqrt{x+1}+1} - 28 + 3^{2-\sqrt{x+1}} < 0$.

34. $(x+1)^{x^2-36} < 1$.

35. $\dfrac{6\cdot 4^{x}}{4^{2x}-1} \leqslant \dfrac{3\cdot 4^{x}}{4^{x}-1} - \dfrac{3}{4^{x}+1}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение и свойства логарифмической функции. График логарифмической функции. Логарифмическая функция. Логарифмы.

Определение: Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b.

Например: $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$;
$\log_7 7 = 1$, так как $7^1 = 7$.

Определение логарифма можно записать так: $a^{\log_a b} = b$. Это равенство справедливо при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$. Его обычно называют **основным логарифмическим тождеством.**

Действие нахождения логарифма числа называют **логарифмированием.**

Действие нахождения числа по его логарифму называют **потенцированием.**

Свойства логарифмов.

При выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы, при вычислениях и при решении уравнений часто используются различные свойства логарифмов. Рассмотрим основные из них.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число. Тогда справедливы формулы:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad \log_a b^r = r \log_a b.$$

Десятичные и натуральные логарифмы.

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Определение: Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Определение: Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию *e*, где *e* — иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$

Иррациональное число *e* играет важную роль в математике и её приложениях. Число *e* можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots \quad \text{или } e = \sum \frac{1}{n!}.$$

$e \approx 2{,}7182818284$.

Достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется **формула замены основания логарифма:**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{или так} \quad \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b,$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$

Следствия из формулы замены основания логарифма.

При $c = 10$ и $c = e$ получаются формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Логарифмическая функция, её свойства и график

В математике и её приложениях часто встречается **логарифмическая функция** $y = \log_a x$, где *a* - заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех поло-

жительных чисел.

2) Множество значений логарифмической функции — множество всех действительных чисел.

3) Логарифмическая функция не является ограниченной.

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $(0;+\infty)$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

5) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.
Ось Oy является вертикальной асимптотой графика функции $y = \log_a x$

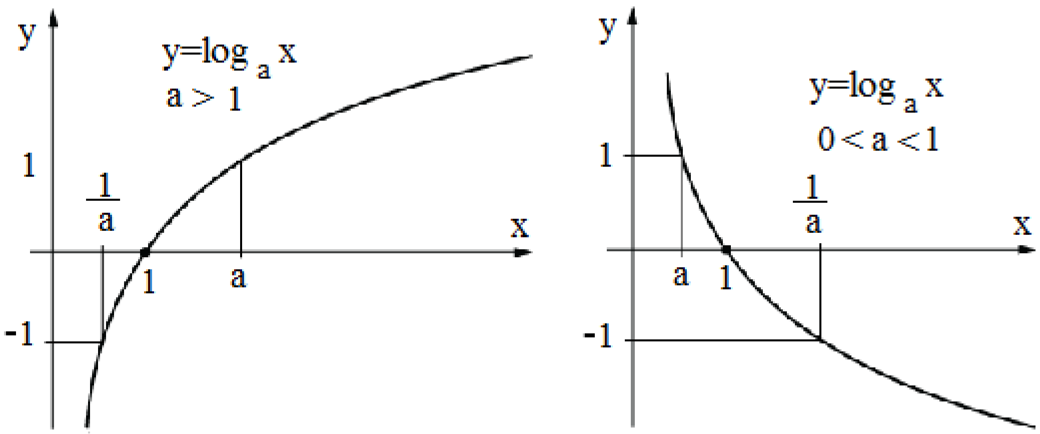


Рис. 6.1

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0).
При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.
Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.

Различные способы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Основные методы решения логарифмических уравнений:

- На основании определения логарифма.
- Метод потенцирования.
- Метод постановки.
- Метод логарифмирования.

Основные правила:

1. Нужно найти область допустимых значений (ОДЗ).
2. С помощью основных логарифмических формул привести в уравнении к логарифмам с одинаковым основанием слева и справа от знака равенства.
3. Если пункт 2 невозможен, то вводится подстановка.

Решение логарифмических неравенств.

При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать, что

1. если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a f(x) \geq b$ <=> $\begin{cases} f(x) \geq a^b \\ a > 1 \end{cases}$, или $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases}$.

2. если $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a f(x) \leq b$ <=> $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq a^b \\ a > 1 \end{cases}$, или $\begin{cases} f(x) \geq a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases}$.

3. $\log_{f(x)} g(x) \geq \log_{f(x)} h(x)$ <=> $\begin{cases} g(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} h(x) \geq g(x) \\ g(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$.

4. $\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x)$ <=> $\begin{cases} g(x) \leq h(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} h(x) \leq g(x) \\ h(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$.

5. $\log_{\varphi(x)} f(x) > 0 \Rightarrow \log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} 1$ <=> $\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > 1 \end{cases}$.

Имеется не менее 4 принципиально различных типов подхода к решению логарифмических неравенств:

1. перебор случаев «основание больше единицы», «основание меньше единицы»;
2. переход к равносильным совокупностям систем неравенств, не содержащих логарифмов, метод рационализации;
3. обобщенный метод интервалов;
4. графический метод.

Метод рационализации.

Напомним, в первом столбце таблицы — функция $F(x)$, которую мы рационализируем. Во втором столбце — функция $G(x)$ — знакосовпадающая с функцией $F(x)$ на области её определения. При этом, используя метод рационализации, нельзя забывать про область определения функций.

Выражение F	**Выражение** G	**ОДЗ**
$\log_{h(x)}f(x)-\log_{h(x)}g(x)$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-g(x))$	$f(x)>0, g(x)>0, h(x)>0,$ $h(x)\neq 1$
$\log_{h(x)}f(x)-1$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-h(x))$	$f(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1$
$\log_{h(x)}f(x)$	$(h(x)-1)\cdot(f(x)-1)$	$f(x)>0, h(x)>0, h(x)\neq 1$
$\log_{f(x)}h(x)-\log_{g(x)}h(x)$	$(f(x)-1)\cdot(g(x)-1)\cdot(h(x)-1)\cdot(g(x)-f(x))$	$h(x)>0,\ f(x)>0, f(x)\neq 1,$ $g(x)>0, g(x)\neq 1$

Теорема 1. Логарифмическое неравенство

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$$

равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x))\geq 0. \end{cases}$$

Неравенству $\log_{\varphi(x)} f(x)\cdot \log_{\kappa(x)} y(x)<0$

соответствует равносильная система $\begin{cases} f(x)>0 \\ \varphi(x)>0 \\ \varphi(x)\neq 1 \\ y(x)>0 \\ \kappa(x)>0 \\ \kappa(x)\neq 1 \\ (f(x)-1)(\varphi(x)-1)(y(x)-1)(\kappa(x)-1)>0 \end{cases}$.

Решение показательно-логарифмических неравенств

Рассматривая показательно-логарифмические уравнения, мы отметили, что для их решения используется метод логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию. Этот метод применяется и для решения ***показательно-логарифмических неравенств***. Здесь также $f(x)>0$ и $g(x)>0$ и переходим от неравенства $f(x)>g(x)$ к неравенству $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, если $a > 1$ и к неравенству $\log_a f(x)<\log_a g(x)$, если $0<a<1$.

Решить уравнения:

1. $\log_2(2x+1)-\log_2 x=\log_4 64.$

2. $\log_2^2 x-\log_2 x-2=0.$

3. $4\log_2 x^2=\log_2^2(-x)+16.$

4. $\log_3 44=\log_3 5\log_5 11-2\log_3(x-2).$

5. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}[3(2x+1)]+\log_{\sqrt{3}} 3=\log_3(2x+1)^2.$

6. $\log_{16} x+\log_8 x+\log_2 x=\dfrac{19}{12}.$

7. $\dfrac{1}{2}\log_3 x^2+3\log_3 \sqrt[3]{x-2}=\dfrac{1}{3}\log_3 8-\log_3 \dfrac{1}{x+6}.$

8. $\log_2(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=\log_2 12.$

9. $\log_2[(x+1)(2x-3)]+\log_2 \dfrac{2(x+1)}{2x-3}=3.$

10. $\log_{1/4}\log_{x-2} 16=-1.$

Найти наибольшие корни уравнений:

11. $\log_3^2 x-\log_3 x-3=2^{\log_2 3}.$

12. $\log_3 x+\log_x \dfrac{1}{9}=1.$

13. $\lg^2 x^2-\lg x^5+1=0.$

Найти наибольшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

8. $\lg 5^{2x+3} - \lg 25 > \lg 5^{3x-2} + \lg 5$.

9. $(x+1)\log_{0,7} 3 - \log_{0,7} 27 > 0$.

10. $\log_6(x^2 - x) < 1$.

11. $5^{\log_5(2x-1)} < 7$.

12. $\log_2 \log_{\sqrt{5}}(x-1) < 1$.

13. $\sqrt{\log_{1/2}(x^2 - 4x + 4)} < 1$.

Решить неравенства:

14. $\log_2(2x+4) + \log_2(x+1) \leqslant \log_2(4-x)$.

15. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+18) - \log_{\frac{1}{2}}(x+5) < \log_{\frac{1}{2}}(6-x)$.

Найти наименьшие целые x, удовлетворяющие неравенствам:

16. $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) - \log_9(x+2) > -\frac{3}{2}$.

17. $\log_{x+1}(5-x) > 1$.

18. $\log_{2x+1}(3-2x) < 1$.

19. $\log_{x-2}(2x-9) < 1$.

7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Построение графиков тригонометрических функций.

Синусом острого угла φ называется отношение длины катета, противолежащего углу φ, к длине гипотенузы прямоугольного треугольника с острым углом φ, и обозначают $\sin\varphi$. Отношение длины прилежащего к углу φ катета к гипотенузе называется ***косинусом*** угла φ, обозначают $\cos\varphi$. ***Тангенсом*** острого угла φ называется отношение длины катета, противолежащего к углу φ, и катета, прилежащего к этому углу ($\mathrm{tg}\varphi$). Обратное отношение длин катета, прилежащего к углу φ, и катета противолежащего, называется ***котангенсом*** ($\mathrm{ctg}\varphi$).

Кроме синуса, косинуса, тангенса и котангенса используют еще ***секанс*** $\sec\varphi = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ и ***косеканс*** $\mathrm{cosec}\,\varphi = \dfrac{1}{\sin\varphi}$.

Выражение, в котором переменная содержится под знаком тригонометричских функций, называется ***тригонометрическим***.

Согласно теореме Пифагора из рисункка (Рис.7.1) следует:

— вершина угла φ прямоугольного треугольника совмещена с началом координат,

— гипотенуза треугольника, являющаяся также и радиусом окружности, равна единице, $r = 1$,

— косинус является проекцией радиуса на ось абсцисс,

— синус является проекцией радиуса на ось ординат.

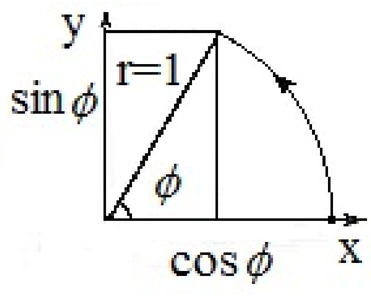
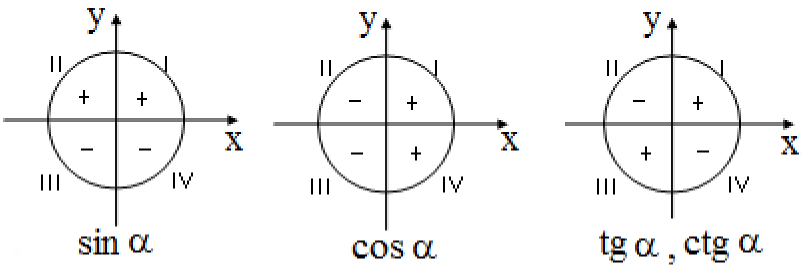


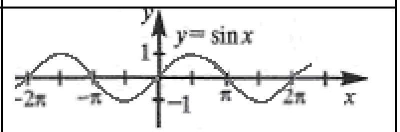
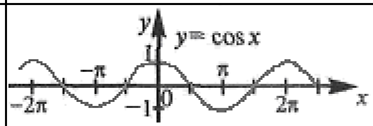
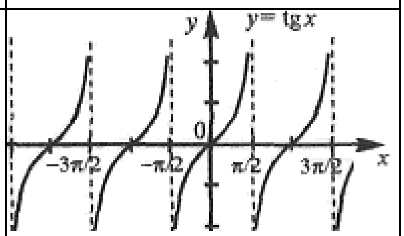
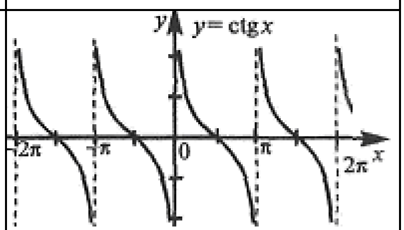
Рис. 7.1

Всё это правильно, но пока только для острых углов, когда радиус-гипотенуза находится в первой четверти.

Знаковая характеристика тригонометрических функций.



Наиболее важные свойства и графики тригонометрических функций

Функция	Область определения	Область значений	Чётность, нечётность	Период, T	Графики функций
y = sin$x$	(–∞, ∞)	[–1, 1]	нечётная	T = 2π	
y = cos$x$	(–∞, ∞)	[–1, 1]	чётная	T = 2π	
y = tg$x$	(–∞, ∞) за исключением точек $\pi n + \pi/2$, здесь n целое	(–∞, ∞)	нечётная	T = π	
y = ctg$x$	(–∞, ∞) за исключением точек πn, здесь n целое	(–∞, ∞)	нечётная	T = π	

Обобщение ситуации на случай любых углов очевидным образом следует из рисунка (Рис. 7.2), а именно, для любых углов косинус, — проекция единичного радиуса на ось абсцисс (Ox),

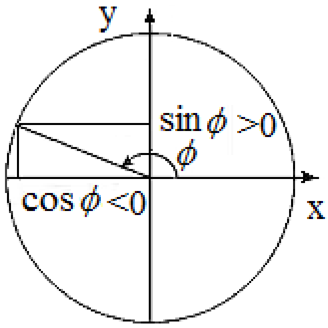


Рис. 7.2

синус — проекция единичного радиуса на ось ординат (Oy), причём в тех случаях, когда проекция попадает в отрицательную область координатных осей, функциям приписывается знак минус.

Функция f(x) называется чётной, если f(–x) = f(x), и нечётной, если f(–x) = –f(x). График чётной функции симметричен относительно оси ординат (Oy), а график нечётной функции симметричен относительно начала координат. Из графиков видно, что косинус является чётной функцией, а синус, тангенс и котангенс — нечётные.

Теорема 1. *1* Если T - основной период функции $f(x)$, то число $\frac{T}{k}$ является основным периодом функции $f(kx+b)$.

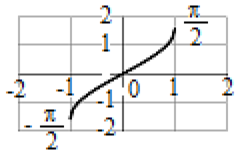
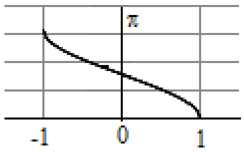
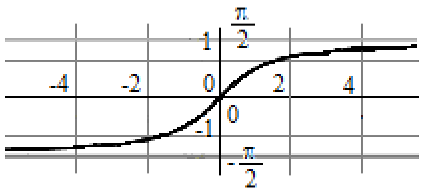
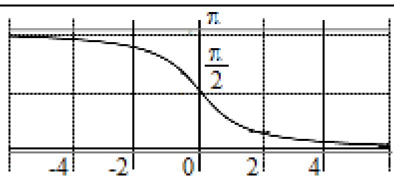
Периоды функций T_1 и T_2 называются соизмеримыми, если существуют натуральные числа m и n, что $mT_1 = nT_2 = T$.

Теорема 2. **2** Если периодические функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеют соизмеримые T_1 и T_2, то они имеют общий период $mT_1 = nT_2 = T$, который является периодом функций $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$.

В теореме говорится о том, что T является периодом функции $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, и не обязательно является основным периодом. Например, основной период функций $\cos x$ и $\sin x$ - 2π, а основной период их произведения - π.

В отличие от тригонометрических функций обратные тригонометрические функции не являются периодическими.

Наиболее важные свойства и графики обратных тригонометрических функций

Функция	Область определения	Область значений	Чётность, нечётность	Графики функций
$y = \arcsin x$	$x \in [-1;1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	нечётная	
$y = \arccos x$	$x \in [-1;1]$	$y \in [0;\pi]$	общего вида $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$	
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$x \in (-\infty;\infty)$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	нечётная	
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$x \in (-\infty;\infty)$	$y \in (0;\pi)$	общего вида $\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$	

Преобразование тригонометрических выражений.

Основные тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad tgx \cdot ctgx = 1$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Полезны также **формулы приведения**, которые позволяют выразить значения тригонометрических функций для любых углов через значения тригонометрических функций углов первой четверти.

Например: $\cos(180°+\alpha) = \cos 180° \cdot \cos\alpha - \sin 180° \cdot \sin\alpha =$

$(-1)\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$.

Чтобы избежать необходимости пользоваться подобными расчётами, применяют мнемоническое правило:

1. Если вычисляется тригонометрические функции углов $90° \pm \alpha$ или $270° \pm \alpha$, то синус меняется на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс. В случае углов $180° \pm \alpha$ или $360° \pm \alpha$ функции остаются неизменными, т.е. синус остаётся синусом и т.п.

2. Знак результата такой же, как у исходной функции в той четверти, в которую попадает исходный угол.

Например: $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Косинус остаётся косинусом, потому что 180°. Исходный угол $(180° - \alpha)$ во второй четверти, где косинус, исходная функция, отрицательна, поэтому знак минус.

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно.

Пусть α — градусная мера угла, β — радианная, тогда справедливы формулы: $\beta = \dfrac{\pi\cdot\alpha^\circ}{180^\circ}$, $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ\cdot\beta}{\pi}$, где $1\,рад \approx 57^0$, $1^0 \approx 0{,}017\,рад$, $\pi = 180^0$,

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338832795$.

Формулы сложения и вычитания аргументов:

$$\begin{matrix} \sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x \\ \cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y \end{matrix}\ ; \quad tg(x\pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1\mp tgx\,tgy}.$$

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение:

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right).$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$tg\,2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}.$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}.$$

Формулы половинного угла:

$$\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}; \quad \cos(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}};$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}; \quad ctg(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}};$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}; \quad ctg(\frac{x}{2}) = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Замена через тангенс половинного угла:

$$\sin(\alpha)=\frac{2tg(\frac{\alpha}{2})}{1+tg^2(\frac{\alpha}{2})};\quad \sin(\alpha)=\frac{2ctg(\frac{\alpha}{2})}{1+ctg^2(\frac{\alpha}{2})};\quad \cos(\alpha)=\frac{1-tg^2(\frac{\alpha}{2})}{1+tg^2(\frac{\alpha}{2})};$$

$$\cos(\alpha)=\frac{ctg^2(\frac{\alpha}{2})-1}{ctg^2(\frac{\alpha}{2})+1};\quad tg(\alpha)=\frac{2tg(\frac{\alpha}{2})}{1-tg^2(\frac{\alpha}{2})};\quad tg(\alpha)=\frac{2ctg(\frac{\alpha}{2})}{ctg^2(\frac{\alpha}{2})-1};$$

$$ctg(\alpha)=\frac{1-tg^2(\frac{\alpha}{2})}{2tg(\frac{\alpha}{2})};\quad ctg(\alpha)=\frac{ctg^2(\frac{\alpha}{2})-1}{2ctg(\frac{\alpha}{2})};$$

Соотношения для обратных тригонометрических функций:

$$\cos(\arccos x)=x;\quad \arccos(\cos x)=x;\quad \sin(\arcsin x)=x;\quad \arcsin(\sin x)=x;$$

$$tg(arctgx)=x;\quad arctg(tgx)=x;\quad ctg(arcctgx)=x;\quad arcctg(ctgx)=x;$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2};\quad arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2};$$

$$\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2};\quad tg(arcctgx)=ctg(arctgx)=\frac{1}{x}.$$

Для решения задач на упрощение тригонометрических выражений требуется достаточно хорошо знать правила преобразования алгебраических выражений и тригонометрические формулы (уметь применять их как по одной, так и в комплексе).

Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

Тригонометрические уравнения.

Способы решения тригонометрических уравнений:

1. **Решение простейших тригонометрических уравнений**

$$\sin x = a; \quad \Rightarrow \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k;$$
$$\cos x = a; \quad \Rightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k;$$
$$tgx = a; \quad \Rightarrow \quad x = arctgx + \pi k;$$
$$ctgx = a; \quad \Rightarrow \quad x = arcctgx + \pi k;$$

где $k \in Z$.

Особо отметим некоторые частные случаи элементраных тригонометрических уравнений, когда решение может быть записано без применения общих формул:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, \quad \cos x = -1 \Rightarrow \quad x = \pi + 2\pi k,$$

$$tgx = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad tgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$ctgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad ctgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad ctgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где $k \in Z$.

2. Если уравнение в результате сводится **к виду** $\sin y = \sin z$**, либо** $\cos y = \cos z$**, либо** $tgy = tgz$**, либо** $ctgy = ctgz$**,** где y и z - выражения от неизвестного x. Из этого следует, что

$$\sin y = \sin z \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y = z + 2\pi k, \\ y = \pi - z + 2\pi k. \end{array}\right.$$

$$\cos y = \cos z \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm z + 2\pi k.$$

$$tgy = tgz \quad \Leftrightarrow \quad y = z + \pi k.$$

$$ctgy = ctgz \quad \Leftrightarrow \quad y = z + \pi k.$$

Где $k \in Z$.

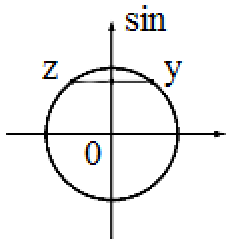


Рис. 7.3

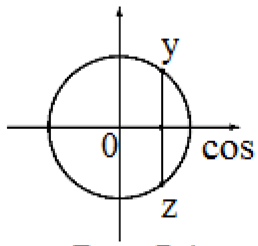


Рис. 7.4

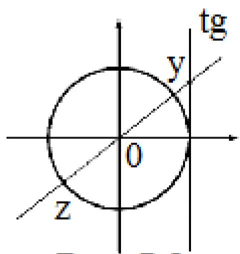


Рис. 7.5

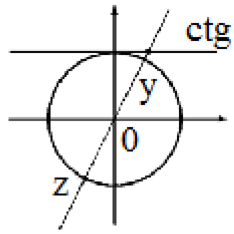


Рис. 7.6

3. Применение свойств тригонометрических функций.

Если уравнение имеет вид $f(t)=g(t)$, f и g – составлены из тригонометрических выражений. Решение можно найти среди тех t, которые удовлетворяют уравнениям $f(t)=a$; $g(t)=a$, где a – действительное число, принадлежащее областям значений $f(t)$ и $g(t)$.

Разложение на множители.

Метод разложения на множетели заключается в следующем: если $f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)$, то всякое решение уравнения $f(x) = 0$ является решение совокупности уравнений $f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, \quad f_n(x) = 0$.

Обратное утверждение, вообще говоря неверно: не всякое решение совокупности является решением уравнения. Это объясняется тем, что решения отдельных уравнений могут не входить в область определения функции $f(x)$.

4. **Решение тригонометрических уравнений с помощью разнообразных тригонометрических формул.**

При решении ряда уравнений применяются всевозможные тригонометрические формулы. Рассмотрим некоторые из них.

а) Применение тригонометрических формул преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

б) Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.

6. **Метод введения новых переменных.**

Метод введения новых переменных позволяет преобразовать исходное тригонометрическое уравнение в другой тип уравнений. При этом важен выбор основного выражения, через которое выражаются остальные части уравнения. Удобнее сводить к виду, когда также зависимости являются рациональными. В частности обозначим через $R(\cos x, \sin x)$ рациональное выражение относительно $\cos x$ и $\sin x$, то есть выражение, получающееся из $\cos x$ и $\sin x$ и постоянных с помощью операций сложения, умножения и деления. Конечно, требуется контроль за областью определения и множеством решений.

а) Рассмотрим уравнение вида $R(\cos x, \sin^{2n} x)=0$ и $R(\cos^{2n} x, \sin x)=0$.

В некоторых случаях удается свести такое уравнение к рациональному уравнению относительно sin$x$ или cos$x$. Иногда удобно руководствоваться следующим правилом выбора подстановки. Если cos$x$ входит в уравнение в четных степенях, то заменяя всюду $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим рациональное уравнение относительно sin$x$. Если же sin$x$ входит в уравнение лишь в четных степенях, то замена $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ приводит уравнение к рациональному виду относительно cos$x$.

б) Рассмотрим уравнение вида R(tg x, cos ^{2m}x, sin^{2n} x)=0.

Если в уравнении встречаются только tg x, четные степени синусов и косинусов, синусы и косинусы двойных углов, то можно прейти к рациональному уравнению с помощью подстановки: $y = tgx$.

в) Уравнение вида R (sin$x$±cos$x$; sin$x$cos$x$)=0.

Решается следующей заменой $\sin x \pm \cos x = y$, $(\sin x \pm \cos x)^2 = y^2$, $1 \pm 2\sin x\cos x = y^2$, $\pm 2\sin x\cos x = y^2 - 1$.

г) Универсальная тригонометрическая подстановка.

Это подстановка $t = tg\dfrac{x}{2}$. Она позволяет свести к рациональному уравнению любое уравнение R(sin$x$, cos$x$)=0. Если $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, то справедливы тождества

$$\sin x = \frac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

После решения надо проверить отдельно являются ли $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, решениями исходного уравнения.

д) Однородные тригонометрические уравнения.

Однородное уравнение – это уравнение, в котором каждое слагаемое имеет одну и туже степень.

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x\cos x + a_2 \sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots + a_{n-1} \sin x\cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$,
где $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n$ - действительные числа. n - показатель однородности.

Ясно, что если $a_0 = 0$, то уравнение примет вид:

$$\cos x\left(a_1 \sin^{n-1} x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^1 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-2} x + a_n \cos^{n-1} x\right) = 0,$$

решениями которого являются значения x, при которых $\cos x = 0$, т. е. числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Второе уравнение, записанное в скобках также является однородным, но степени на 1 ниже. Если же $a_0 \neq 0$, то эти числа не являются корнями уравнения.

И наоборот, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ получим: $\cos x = 0$, $\sin x = \pm 1$ и в исходном уравнении $a_0 = 0$.

Итак, при $a_0 \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, следовательно, $\cos x \neq 0$, поэтому можно разделить обе части уравнения на $\cos^n x$. В результате получаем уравнение:

$$a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1} x + a_2 tg^{n-2} x + \ldots + a_{n-1} tgx + a_n = 0,$$

которое, подстановкой $tgx = y$ легко сводится к алгебраическому:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} y + a_n = 0.$$

Однородным тригонометрическим уравнением 1-ой степени называется уравнение вида: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$.

Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда уравнению не удовлетворяют те x, для которых $\cos x = 0$. Поделив на $\cos x$ обе части уравнения получим уравнение $a \cdot \mathrm{tg} x + b = 0$.

Однородным уравнением 2-ой степени называется уравнение вида: $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos x = 0$.

Если $a \neq 0$, тогда разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение $a^2 tgx + btgx + c = 0$, которое подстановкой $tgx = y$ легко приводится к квадратному: $ay^2 + by + c = 0$.

7. Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента.

Рассмотрим уравнение вида: $a\cos x + b\sin x = c$,

1) если $c = 0$, то уравнение однородное.

2) если $c \neq 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$(то есть хотя бы одно из чисел a или b не равно 0), то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Т. к. $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1; \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ и $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует такой угол φ, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, тогда

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ т. е. $a^2 + b^2 < c^2$, то корней нет.

2) если, $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ т. е. $a^2 + b^2 \geq c^2$, тогда

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z.$$

$$x = -\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z$$

Тригонометрические неравенства.

-Решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

При решении тригонометрических неравенств вида $f(x) \geq 0$, где $f(x)$ - одна из тригонометрических функций, удобно использовать тригонометрическую окружность для того, чтобы наиболее наглядно представить решения неравенства и записать ответ. Основным методом решения тригонометрических неравенств является сведение их к простейшим неравенствам типа $\sin x \geq a$. Разберём на примере, как решать такие неравенства.

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом полезно понятие о линии тангенсов и котангенсов. Таковыми являются прямые $x = 1$ и $y = 1$ (Рис. 7.8), касающиеся тригонометрической окружности. Легко заметить, что если построить луч с началом в начале координат, составляющий угол α с положительным направлением оси абсцисс, то длина отрезка от точки $(1;0)$ до точки пересечения этого луча с линией тангенсов в точности равна тангенсу угла, который составляет этот луч с осью абсцисс. Аналогичное наблюдение имеет место и для котангенса.

-Неравенства с обратными тригонометрическими функциями удобно решать с использованием графиков обратных тригонометрических функций. Покажем, как это делается на примере.

1. Используя метод интервалов.

Общая схема:

1) С помощью тригонометрических формул разложить на множители.
2) Найти точки разрыва и нули функции, поставить их на окружность.
3) Взять любую точку К (но не найденную ранее) и выяснить знак произведения. Если произведение положительно, то поставить точку за единичной окружностью на луче, соответствующему углу. Иначе точку поставить внутри окружности.
4) Если некоторые точки разных серий совпадают, то их называют кратными. Точки, которые повторяются в четном числе серий, называют точками четной кратности, а те, что повторяются в нечетном числе серий,— точками нечетной кратности. Провести дуги следующим образом: начать с точки К, если следующая точка нечетной кратности, то дуга пересекает окружность в этой точке, если же точка четной кратности, то не пересекает.
5) Дуги за окружностью – положительные промежутки; внутри окружности – отрицательные промежутки.

Решение тригонометрических неравенств графическим методом

Заметим, что если $f(x)$ - периодическая функция, то для решения неравенства $f(x) > a$ ($f(x) < \text{a}$) необходимо найти его решения на отрезке, длина которого равна периоду функции $f(x)$. Все решения исходного неравенства будут состоять из найденных значений x, а также всех x, отличающихся от найденных на любое целое число периодов функции $f(x)$.

Аналогично решаются неравенства $\sin x < a$, $\cos x > a$, и т.п.

4. Сведение к одному или нескольким неравенствам.

В большинстве случаев решение тригонометрических неравенств можно сводить при помощи тождественных тригонометрических преобразований и введения вспомогательных неизвестных к решению одного или нескольких неравенств.

Упростить выражения:

20. $$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos(\pi/2-2\alpha)}}.$$

21. $$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

22. $$\frac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

23. $$\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right).$$

24. $$\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}(\alpha-\pi/4)\sin^2(\alpha+\pi/4)}.$$

25. $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\left(1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

26. $$\frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

27. $$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Решить уравнения:

14. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

15. $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x.$

16. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2.$

17. $2\cos 2x + 2\,\mathrm{tg}^2\, x = 5.$

18. $\sin\left(8x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin x.$

19. $\sin^2 x + \dfrac{3}{2}\cos^2 x = \dfrac{5}{4}\sin 2x.$

20. $\sin x + \cos x - 1 = \mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}(\cos x - 1).$

21. $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2.$

22. $1 + \cos x + \sin x = 0.$

23. $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$

Решить неравенства на заданных промежутках:

42. $\cos x < \dfrac{1}{2}$ на $[-2\pi, 0]$.

43. $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на $[\pi/2, 3\pi/2]$.

44. $\sin 2x + 2\sin x > 0$ на $[0, 2\pi]$.

45. $(1 - \cos x)(\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}) < 0$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.

46. $\sqrt{5 - 2\sin x} \geqslant \sin x - 1$ на $(-\pi, 0)$.

47. Найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$|\cos x| < \frac{1}{2}.$$

8. ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Нахождение производной функции.

Определение: Пусть задана функция $y = f(x)$, определенная в некотором интервале. При каждом значении аргумента x в этом интервале функция $y = f(x)$ имеет определенное значение. Если аргумент x получил приращение Δx, то и функция получила некоторое определенное приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Если существует предел отношения

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0$$

то он называется производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция вычисления производной называется дифференцированием функции.

Геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 - это тангенс угла наклона между осью абсцисс и касательной к графику этой функции, проходящей через точку с абсциссой x_0.

1. Если угол наклона касательной острый, то тангенс положительный, а значит, производная положительна.
2. Если угол наклона касательной тупой, то тангенс отрицательный, а значит, производная отрицательна.
3. Если угол наклона касательной равен нулю, то тангенс равен нулю, а значит, производная равна нулю.
4. Если угол наклона прямой, то тангенс не существует, а значит, производная не существует.

Приведем таблицу производных элементарных функций:

1) $(C)'=0$, $C = Const$

2) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, $n \in R$, $x > 0$

3) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$; $\left(e^x\right)' = e^x$, $x > 0$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

5) $\left(\sin x\right)' = \cos x$, $x \in R$

6) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$, $x \in R$

7) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

8) $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$

9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$

10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$

11) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in R$

12) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in R$.

Правила вычисление производных.

Производная суммы двух функций: $(u + v)' = u' + v'$.

Производная произведения постоянной и функции: $(Cu)' = Cu'$.

Производная произведения двух функций: $(uv)' = u'v + uv'$.

Производная частного двух функций: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Производная сложной функции $y=f(g(x))$: $f'(g(x)) = f'(g) \cdot g'(x)$.

Производная функции вида $y=f(ax+b)$:

$y' = f'(ax+b) = f'(ax+b)\cdot(ax+b)' = a\cdot f'(ax+b)$.

Исследование функции на экстремум. Интервалы возрастания, убывания, выпуклости, вогнутости. Асимптотика.

Общая характеристика функции.

Если каждому значению переменной x из множества X по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное вполне определенное значение y, то переменную y называют *функцией* от x. Записывают $y = f(x), x \in X, y \in Y$ или $f : X \to Y$. Говорят ещё, что функция отображает множество X на множество Y.

Множество X называется областью определения функции и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется множеством значений функции и обозначается $E(f)$. x – независимая переменная величина или аргумент, y – функция или зависимая переменная.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D называется *четной*, если для любого $x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$; *нечетной,* если для любого $x \in D$ выполняется условие $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, нечетной – относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* на множестве D, если существует такое число $T>0$, что при каждом значении $x \in D$ $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется *периодом функции*.

Возрастание и убывание функции.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в интервале $(a;b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, если $f(x_2) \geq f(x_1)$, функция называется *неубывающей*.

Иными словами – значения возрастающей функции увеличиваются одновременно со значением аргумента.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в интервале $(a;b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$, если $f(x_2) \le f(x_1)$, функция называется *невозрастающей*.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции называются *монотонными*. А возрастающие и убывающие – *строго монотонными*.

Пусть задана функция $f(x)$. Возьмем две точки на промежутке $[a,b]$ x_1 и x_2 при условии, что $x_2 > x_1$. Тогда функция называется возрастающей на промежутке $[a,b]$, если $f(x_2) > f(x_1)$. Функция называется убывающей на промежутке $[a,b]$, если $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция дифференцируема на определенном промежутке и производная функции в точке $x = c$ положительна, то на этом промежутке она возрастает.

Действительно, согласно теореме Лагранжа, если $x_2 > x_1$ и $f'(c) > 0$, то функция возрастает (Рис. 8.1).

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

$$f(x_2) > f(x_1),$$

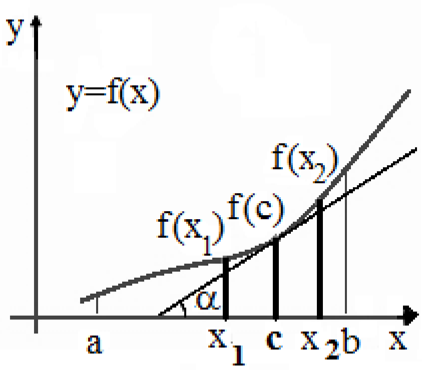


Рис. 8.1

т.е. если левая часть равенства положительна, где $x_1 < c < x_2$ и $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

При убывании функции можно сделать аналогичный вывод.

Если функция дифференцируема на определенном промежутке и производная функции в

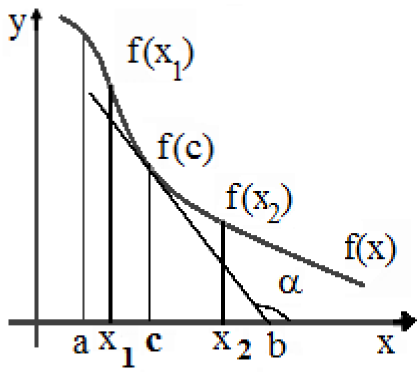


Рис. 8.2

точке $x = c$ отрицательна, то на этом промежутке она убывает (Рис. 8.2). Опять же, согласно теореме Лагранжа, если $x_1 < c < x_2$ и $f'(c) < 0$, то функция убывает.

$$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1),$$

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Экстремум функции.

Если функция $f(x)$ определена на определенном промежутке и существует такая точка А на этом промежутке, что $f(x) < f(A)$ во всех точках окрестности точки А, то данная точка называется точкой максимума (Рис. 8.3).

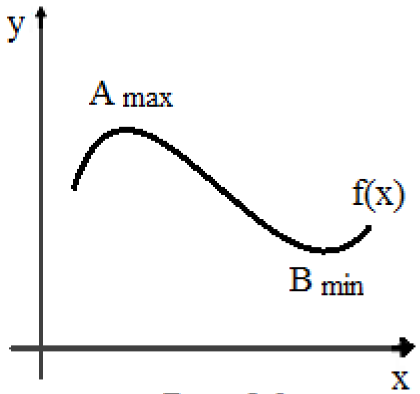


Рис. 8.3

Если функция $f(x)$ определена на определенном промежутке и существует такая точка В на этом промежутке, что $f(x) > f(B)$ во всех точках окрестности точки В, то данная точка называется точкой минимума (Рис. 8.3).

Точки максимума и минимума называются точками *экстремума*, а значения функции в этих точках – *экстремумами функции*.

Касательная к графику функции в данных точках параллельна оси ОХ.

Теорема (Ферма – необходимое условие экстремума). Если x_0 - точка экстремума для функции $y = f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю $(f'(x_0) = 0)$, либо не существует.

Точки области определения функции $f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются *критическими точками* функции.

Здесь нужно отметить, что не во всех критических точках функция имеет экстремум. Например функция $y = x^3$ не имеет экстремума, т.к. не выполняется условие $f(x)$ <(>) $f(x_0)$, т.е. в окрестности точки x_0 значение функции должно быть больше (меньше) значения функции в точке x_0. Таким образом, функция $y = x^3$ имеет критическую точку при x=0 (т.к. $f'(0)=0$), но экстремума в этой точке нет.

В силу теоремы Ферма экстремумы функции находятся среди ее критических точек.

Первое достаточное условие экстремума. Если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с (+) на (-), то точка x_0 является точкой максимума; если с (-) на (+), то точкой минимума; если знака не меняет, то экстремума нет.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть в точке x_0 производная равна нулю $f'(x_0)=0$, а вторая производная $f''(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка минимума; если $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка максимума.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба.

Пусть задана функция $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема на определенном промежутке $[x_1;x_3]$.

Возьмем промежуток $[x_1; x_2]$. Тогда, если при любом значении x таком, что $x_1<x<x_2$, значение функции меньше значения касательной в точке x, т.е. $f_ф(x) \leq f_к(x)$, то функция выпукла вверх (Рис. 8.4). График функции называется выпуклым на промежутке $[x_1; x_2]$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

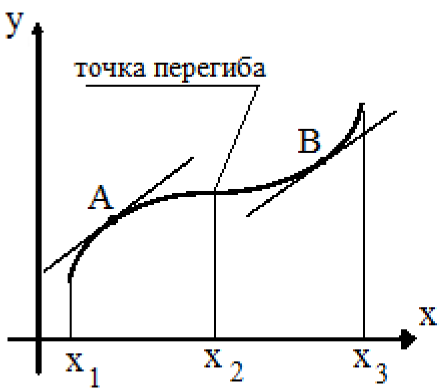


Рис. 8.4

Возьмем промежуток $[x_2; x_3]$. Тогда, если при любом значении x таком, что $x_2<x<x_3$, значение функции больше значения касательной в точке x, т.е. $f_ф(x) \geq f_к(x)$, то функция выпукла вниз (Рис. 8.4). График функции называется вогнутым на промежутке $[x_2; x_3]$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

Если функция выпукла вверх, то вторая производная функции меньше нуля, т.е. $f''(x) < 0$.

Если функция выпукла вниз, то вторая производная функции больше нуля, т.е. $f''(x) > 0$.

Первое достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ имеет первую производную в точке x_0 и вторую производную в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может самой точки). Тогда если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Второе достаточное условие точки перегиба. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда если $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба этой функции.

Асимптоты графика функции.

Прямая линия *m* называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние *d* от точки *M*, лежащей на этом графике, до прямой *m* стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* (Рис. 8.5) графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности.

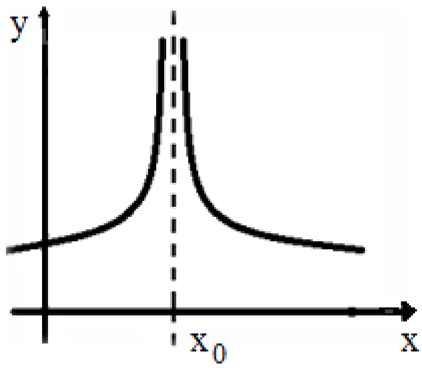


Рис. 8.5

Обычно вертикальными асимптотами являются прямые в точках разрыва 2-го рода. Поэтому для отыскания вертикальных асимптот определяют точки $a_1, a_2, .. a_n$ бесконечного разрыва функции. Тогда уравнение вертикальных асимптот

$x = a_1, x = a_2, ..., x = a_n$. Вертикальные асимптоты могут быть и на границе области определения функции. Например, как у функции $y = \ln x$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* (Рис. 8.6) графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(kx+b))=0$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+b))=0$).

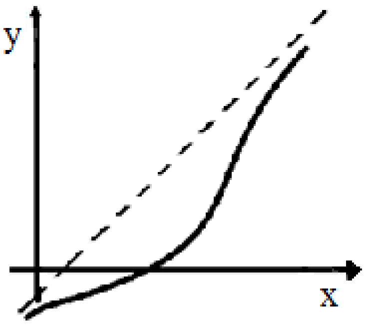


Рис. 8.6

Уравнение наклонной асимптоты к графику функции $y = f(x)$ ищем виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx).$$

Если хотя бы один из пределов k и b не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет. Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов k и b следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Частным случаем наклонной асимптоты (при $k = 0$) является *горизонтальная асимптота* (Рис. 8.7).

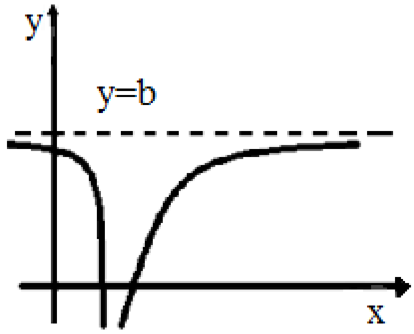


Рис. 8.7

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$).

Полное исследование функции. Построение графика функции.

Порядок исследования

I. Общая характеристика функции.

1.1. Область определения функции.

1.2. Поведение функции в окрестностях точек разрыва.

1.3. Точки пересечения графика с осями координат.

1.4. Симметрия графика.

1.5. Периодичность графика.

II. Интервалы монотонности и экстремумы функции.

2.1. Нахождение первой производной функции.

2.2. Определение критических точек.

2.3. Нахождение интервалов монотонности.

2.4. Определение экстремумов функции.

III. Интервалы выпуклости и вогнутости.

3.1. Вычисление второй производной функции.

3.2. Определение точек перегиба.

3.3. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости.

IV. Наклонные асимптоты графика функции.

V. График функции.

Найти производные заданных функций $y=y(x)$ при заданных значениях аргумента x_0:

1. $y=\dfrac{\ln x}{x+1}$, $x_0=1$.

2. $y=3^x\dfrac{2}{\ln 3}-2x^3-3$, $x_0=2$.

3. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3\ln x$, $x_0=1$.

4. $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$, $x_0=2$.

5. $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{2-x}$, $x_0=1$.

6. $y=\sin x(x^2-2x+3)$, $x_0=0$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2-1}}$, $x_0=1$.

8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $y=(x^2-3x+1)e^x$, $x_0=0$.

10. $y=\sin^2 2x+1$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

11. $y=\dfrac{2\operatorname{ctg} 3x}{x^2}+\cos\dfrac{\pi}{16}$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

12. В какой точке кривой $y=-x^2+2$ касательная перпендикулярна прямой $x-y+1=0$?

13. Найти сумму координат точки с отрицательной абсциссой, касательная в которой к графику функции $f(x)=x^2+2x+4$ проходит через начало координат.

14. Если прямая $y=3-5x$ является касательной к параболе $y=x^2+bx+c$ в точке с абсциссой 0, то чему равна сумма $b+c$?

15. Найти значение x, при котором касательная к графику функции $f(x)=8\cdot 2^{x-3}$ с угловым коэффициентом $k=2\ln 2$ пересекает ось абсцисс.

16. Через точку $(2,-5)$ проходят две касательные к графику функции $f(x)=-3\sqrt{x}+1$. Найти сумму абсцисс точек касания.

17. Написать уравнение касательной к кривой $y=\ln(x-1)$, параллельной прямой $y=2x-1$.

18. Найти угол с осью абсцисс касательной к кривой $y=x\ln x$, проведенной в точке пересечения этой кривой с осью абсцисс.

19. При каких значениях параметра a прямая $y=ax-2$ касается графика функции $y=1+\ln x$?

20. Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции

$$y=\frac{x+1}{x-3},$$

которые образуют с осью Ox угол $\dfrac{3\pi}{4}$.

Найти значения функций в точках максимума:

24. $y=2x^3-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{8}$.

25. $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+71\frac{13}{15}$.

26. $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$.

27. Найти точку минимума функции $f(x)=-9x^5+90x^4-180x^3-30$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках:

28. $y=x^3-6x^2+1$ на $[-1,2]$.

29. $y=\sin x\cdot\sin 2x$ на полном периоде.

30. Найти значение выражения $m-3M$, если m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=-2x^3-3x^2+12x-16$ на отрезке $[-1,2]$.

31. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=-x^2+3|x|-2$$

на отрезке $[-2,0]$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Веселаго И.А. Алгебра для школьников и абитуриентов. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2007. — 336 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике/ М.Я. Выгодский.– Москва: АСТ: Астрель, 2010.–703с.
3. Математика для поступающих в вузы. Шарыгин И.Ф. 6-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2006. - 479 с.
4. Краткий курс высшей математики: учебник/ К.В. Балдин [и др.].–Москва: ДашковиК°, 2012.–510с.
5. Кудрявцев В.А.,Демидович Б.П.Краткий курс высшей математики.–М.: Наука,-1989. - 656с.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшаяшкола, -1996, 479с
7. Соболев А.Б.,Вигура М.А., Рыбалко А.Ф., Рыбалко Н.М. Элементарная математика: Учебное пособие. - Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. - 81 с
8. Иванов О. А. Элементарная математика для школьников, студентов ипреподавателей. — М., 2009. — 384 с.: ил.
9. Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Будак А.Б., Щедрин Б.М. 3-е изд., перераб. и доп. М.: УНЦ ДО, 2001. 690 с.
10. Элементарная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч.1. Хорошилова Е.В. М.: Изд-во МГУ, 2010. – 472 с.
11. Элементарная математика. Учебное пособие для старшеклассников и абитуриентов. Ч.2. Хорошилова Е.В. М.: Изд-во МГУ, 2010. – 435 с.